

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

И.В. Семушин

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Математическое моделирование сложных систем»**

Для студентов магистратуры по специальности 02.04.03 «Математическое
обеспечение и администрирование информационных систем»
очной формы обучения

Ульяновск, 2019

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математическое моделирование сложных систем» / составитель: И.В. Семушин. – Ульяновск: УлГУ, 2019. Настоящие методические указания предназначены для студентов магистратуры по специальности 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» очной формы обучения. В работе приведены подробные указания по выполнению лабораторных работ. Рекомендуется студентам очной формы обучения при подготовке к зачету и экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол № 2/19 от 19 марта 2019 г.).

Содержание

1	Общие требования	4
2	Варианты заданий	7
3	Задания для аналитического решения и численного моделирования	8
4	Методические указания	33
4.1	Запись системы дифференциальных уравнений, моделирующих поведение (состояние) системы	33
4.2	Запись модели измерений	34
4.3	Построение дискретной модели состояния	34
4.4	Запись уравнений оптимального оценивания с дискретными моделями системы	38
4.5	Планирование вычислительного эксперимента	39
5	Вычислительный эксперимент	40
6	Рекомендуемая литература	41

1 Общие требования

Лабораторный практикум предназначен для развития у студентов углубленного понимания фундаментальных концепций теории оптимальной фильтрации при ее практическом использовании в реальных задачах. Практикум рассчитан на один семестр и обладает следующими особенностями.

1) Он состоит из ряда заранее выбранных заданий, выполняемых в заданной преподавателем последовательности. Каждое задание выполняется как самостоятельная (отдельная) работа с теоретической и практической частями. Теоретическая часть представляет собой то аналитическое решение проблемы, которое неизбежно предшествует вычислительному эксперименту. Здесь проводится весь анализ, включая построение модели, запись уравнений фильтрации, теоретические выводы, ответы на контрольные вопросы и планирование вычислительного эксперимента. Некоторые вопросы, относящиеся к этой части работы, могут прорабатываться на семинарских (групповых) занятиях, но, в основном, эта работа выполняется студентом во внеаудиторное время. Письменный отчет по ней предъявляется преподавателю в дисплейном классе и служит допуском к выполнению практической (экспериментальной) части работы на компьютере по соответствующему заданию.

2) Практическая часть работы должна давать экспериментальный материал для иллюстрации и обсуждения результатов теоретического анализа. Она выполняется с использованием, преимущественно, готовых программных средств для задач стохастического моделирования. За ограниченное время студент должен ввести подготовленные исходные данные и зафиксировать результаты эксперимента, чтобы далее, во внеаудиторное время, включить оценку этих результатов в письменный отчет. Завершенный таким образом отчет сдается на следующем занятии в дисплейном классе и также служит допуском к выполнению следующе-

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
O	1.7	2	2.3	2.7	3	3.3	3.7	4	4.3	4.7	5	5.3
	неудовл.			удовл.			хорошо			отлично		

Таблица 1: Критерии выставления оценок.

го задания. При несдаче отчета студент теряет допуск к выполнению на компьютере практической части следующего задания, но может использовать дисплейное время занятия для выполнения практической части предыдущего задания.

3) Всего на 7 занятий в течение 14 недель выдается 12 заданий, и восьмое занятие в семестре является итоговым (зачетным). Каждый студент продвигается по выполнению этих заданий в своем собственном темпе, в зависимости от того, как он работает. Кроме того, студент имеет возможность пропустить некоторое задание, — исключить его из своего графика работы, — если он заранее решил для себя, на какой уровень оценки он претендует.

4) Итоговая оценка за лабораторный практикум выставляется по следующему правилу: Оценка “2” ставится, если выполнено менее четырех заданий из 12-ти. Чтобы получить оценку “3”, необходимо выполнить 4, 5 или 6 заданий из 12-ти. Чтобы получить оценку “4”, необходимо выполнить 7, 8 или 9 заданий из 12-ти. Чтобы получить оценку “5”, необходимо выполнить 10, 11 или 12 заданий из 12.

Количественным ориентиром для оценки “О” в зависимости от числа N выполненных работ может служить таблица 1.

Существенно иметь в виду, что эти количественные показатели выполнения заданий являются лишь необходимыми, но недостаточными условиями. Чтобы они оказались и достаточными, преподаватель оценивает также и качественные показатели. В их числе: полнота и правильность теоретической части; согласованность теоретического анали-

за с экспериментом; умение представить текст отчета как завершенную учебно-исследовательскую работу; ответы на вопросы преподавателя при приеме отчета.

5) Неудовлетворительная оценка за лабораторный практикум влечет недопуск к экзамену. Удовлетворительные оценки (3, 4, 5) участвуют в выставлении на экзамене итоговой оценки за весь изучаемый курс, в равных долях с оценками за ответы на первый и второй вопросы экзаменационного билета (вместе с дополнительными вопросами вокруг вопросов билета).

2 Варианты заданий

Таблица 2 содержит варианты лабораторного практикума. Каждый вариант состоит из 12-ти заданий и двух частей. Это означает то, что в течение семестра преподаватель проводит два контрольных занятия (по каждой части), на которых необходимо сдать одно из заданий, обозначенных в таблице 2 символом '*' (эти задания являются “обязательным минимумом” из 12-ти возможных). Незачет на контрольном занятии влечет снижение итоговой оценки по лабораторному практикуму на полбалла. Номер варианта назначается преподавателем.

Вариант	Первая часть						Вторая часть					
A	1	2*	5	7*	9*	10	11*	15*	18	19	20*	23
B	1	3*	5	6*	8*	10	12*	16*	18	19	22*	23
C	1*	4*	5	9	10	13*	14*	17*	18	19	21*	23
D	1	2*	5	7*	9*	10	12*	16*	18	19	22*	23
E	1	2*	5	7*	9*	10	14*	17*	18	19	21*	23
F	1	3*	5	6*	8*	10	11*	15*	18	19	20*	23
G	1	3*	5	6*	8*	10	14*	17*	18	19	21*	23
H	1*	4*	5	9	10	13*	11*	15*	18	19	20*	23
I	1*	4*	5	9	10	13*	12*	16*	18	19	22*	23

Таблица 2: Варианты заданий.

Задания, не помеченные '*', сдаются в соответствии с требованиями, указанными в пп. 2-5 предыдущего раздела.

3 Задания для аналитического решения и численного моделирования

Каждое из нижеследующих заданий выполняется в двух формах: запись необходимых уравнений оптимальной фильтрации и вычислительный эксперимент. Этому должно предшествовать построение линейной модели системы с явным (поэлементным) видом всех матриц и векторов. Анализ модели или фильтра также может входить в аналитическое решение.

Задание 1. Пусть в любой момент времени t положение материальной точки вдоль оси OX , координата $x(t)$, есть сумма неизвестной (случайной) постоянной величины, равной $x(t_0) = x_0$, и процесса броуновского движения $\beta(t)$ с постоянной известной величиной диффузии σ_w^2 . Измеряют положение $x(t)$ дискретно во времени с аддитивной случайной ошибкой, которая имеет нулевое среднее значение. В момент измерения t_i , $i = 1, 2, \dots$ ошибка измерения имеет дисперсию $R(t_i)$ и значение, статистически не зависимое от значений в другие моменты.

В вычислительный эксперимент включите изучение влияния следующих факторов на качество оценок:

- (a) дисперсия σ_w^2 ;
- (b) дисперсия $R(t_i)$;
- (c) соотношение $\sigma_w^2/R(t_i)$;
- (d) появление в установившемся режиме фильтрации в некоторый момент t_* одиночного аномального измерения с $R(t_*) \rightarrow \infty$ или точного измерения с $R(t_*) = 0$.

Понятие “качество оценок” включает в себя: смещение, точность и время достижения установившегося (стационарного в широком смысле) режима.

Задание 2. Выполните задание, отличие которого от задания 1 заключается только в том, что координата $x(t)$ есть сумма линейной функции ut , где u — известная величина постоянной составляющей скорости движения точки и процесса броуновского движения $\beta(t)$.

Задание 3. Пусть начальное положение $x(t_0)$ случайно и в любой момент времени t скорость материальной точки вдоль оси OX , скорость $v_x(t)$, есть сумма неизвестной (случайной) постоянной составляющей x и процесса броуновского движения $\beta_x(t)$ с постоянной известной величиной диффузии $q_x = \sigma_w^2$. Измерения производят так же, как в задании 1, но с постоянным темпом τ .

(а) Постройте дискретную линейную модель для вектора состояния $x(t)$ в виде

$$x(t_{i+1}) = \Phi x(t_i) + G_d w_d(t),$$

где G_d — нижнетреугольная матрица с единицами по диагонали; $w_d(t)$ — дискретный белый шум с некоррелированными компонентами.

(б) Перепишите модель так, что исходными для нее служат независимые друг от друга стандартизованные гауссовские (то есть каждый с единичной дисперсией) дискретные белые шумы. Определите физические размерности в системе единиц SI для каждой из величин (постоянных или переменных), входящих в модель.

(с) Найдите явное решение для каждой компоненты вектора состояния из дискретной модели, отделив в решении часть, определяемую только начальными условиями. Считая их детерминированными, определите дисперсию координаты $x(t)$ и дисперсию скорости $v_x(t)$ в любой момент t .

(д) В число изучаемых факторов включите характеристики начального состояния, возмущения и ошибок измерения. Для этого спланируйте и проведите вычислительный эксперимент с процессом оптималь-

ной фильтрации. Покажите, что, несмотря на неограниченный рост дисперсии координаты и дисперсии скорости, дисперсии их оценок ограничены. Определите предельные значения дисперсий оценок и время достижения ими установившихся значений. Какое движение совершает точка и что является результатом оценивания?

Задание 4. Выполните задание, все отличие которого от задания 3 заключается в том, что не скорость $v_x(t)$, а ускорение $a_x(t)$ материальной точки при ее движении вдоль оси OX есть сумма неизвестной (случайной) постоянной составляющей a и процесса броуновского движения $\beta(t)$ с постоянной известной величиной диффузии $q = \sigma_w^2$.

Задание 5. Выполните задание 3, пункты (а) и (б), при этом отличие заключается в следующем:

(а) материальная точка совершает движение на плоскости, где положение задается декартовыми координатами x и y ;

(б) условия движения точки вдоль оси OX такие же, как в задании 3; независимо и так же задано движение вдоль оси OY , то есть в описании этого движения всюду в обозначениях величины вместо x присутствует y , при этом $q_x = q_y = \sigma_w^2$;

(в) вместо измерений декартовых координат (x, y) измеряют полярные координаты $D = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и $\varphi = \arctg(y/x)$, так что $x = D \cos \varphi$, $y = D \sin \varphi$. В измерениях координат D и φ присутствуют аддитивные случайные независимые ошибки с дисперсиями σ_D^2 и σ^2 .

В этих условиях:

(а) выразите малые случайные независимые ошибки e_x и e_y в псевдоизмерениях $z_x = x + e_x$ и $z_y = y + e_y$ с точностью до величин первого порядка малости;

(б) с учетом этого определите поэлементно ковариацию ошибок псевдоизмерений, чтобы строить в дальнейшем оптимальный фильтр

для декартовых координат;

(с) спланируйте и проведите вычислительный эксперимент, как указано в задании 3, пункт (d); при этом возьмите *Вариант 1* — с неучтенной взаимной ковариацией ошибок псевдоизмерений координат x и y , когда внедиагональные элементы матрицы ковариации ошибок псевдоизмерений искусственно считаются нулевыми;

(d) найдите LDL^T — разложение матрицы ковариации ошибок псевдоизмерений, где L — нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, D — диагональная матрица с положительными элементами;

(е) декоррелируйте псевдоизмерения, умножая их на L^{-1} , чтобы полученные таким образом новые псевдоизмерения имели диагональную матрицу ковариаций для дальнейшего упрощения вычислений в алгоритме оптимальной фильтрации (результат должен быть выражен через элементы матриц L и D);

(f) спланируйте и проведите вычислительный эксперимент, как указано в задании 3, пункт (d); при этом возьмите *Вариант 2* — с учтенной взаимной ковариацией ошибок псевдоизмерений координат x и y , когда в фильтр вводятся новые (декоррелированные) псевдоизмерения этих координат;

(g) сравнительно проанализируйте результаты экспериментов по пунктам (с) и (f) данного задания 5. Сделайте выводы по целесообразности варианта 2 (с декоррелированными псевдоизмерениями), оправдывая или отвергая его по критериям дополнительной точности оценивания точных декартовых координат (x, y) и составляющих (v_x, v_y) вектора скорости.

Задание 6. Случайная последовательность описывается скалярным соотношением

$$x(t_{i+1}) = (-1)^{2i+1}x(t_i)$$

для $i = 0, 1, \dots$, где $x(t_0)$ — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией P_0 . Последовательность имеет в каждый момент отсчета одну и ту же абсолютную величину и меняющийся знак, то есть $x(t_{i+1}) = -x(t_i)$.

Она наблюдается в присутствии аддитивной гауссовской белой последовательности с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $R(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$

(а) Запишите уравнения оптимальной фильтрации.

(б) Докажите, что: если $P_0 > 0$ и $0 < R(t_i) < \infty$ для всех $i \geq 1$, то $P(t_i^+)$ — монотонно убывающая функция i ; если $R(t_i) \rightarrow \infty$ для некоторого i , то такое anomальное измерение автоматически выбрасывается; если $R(t_i) = 0$ для некоторого i , то дальнейшая фильтрация становится бесполезной и может быть прекращена.

(с) Вычислительным экспериментом подтвердите аналитическое решение.

Задание 7. Состояние x определяется последовательностью скалярных значений

$$x(t_{i+1}) = \Phi x(t_i) + w(t_i),$$

где $x(t_0)$ — гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией P_0 ; $\Phi = \text{const}$, а $w(t_i)$ — гауссовская белая последовательность с нулевым средним и постоянной дисперсией Q . Наблюдения образуют последовательность скалярных значений

$$z(t_i) = x(t_i) + v(t_i),$$

где $v(t_i)$ — гауссовская белая последовательность с нулевым средним и постоянной дисперсией R . Обе белые гауссовские последовательности и $x(t_0)$ между собой независимы.

(а) Запишите уравнения оптимальной фильтрации.

(b) Докажите, что: погрешность (ковариация ошибки) предсказания ограничена снизу величиной Q ; погрешность (ковариация ошибки) фильтрации находится в интервале $[0, R]$; коэффициент оптимальной фильтрации K находится в интервале $[0, 1]$; при любом неоптимальном значении $K_* \in [0, 1]$ коэффициента фильтрации для установившейся погрешности фильтрации $\bar{P}$ справедливо выражение

$$\frac{\bar{P}}{R} = \frac{[(1 - K_*)^2 \lambda + K_*^2]}{[1 - (1 - K_*)^2 \Phi^2]}$$

где $\lambda = Q/R$ — соотношение “сигнал/шум”.

(c) Из условия минимума $\bar{P}$ по K_* найдите явное выражение для установившегося значения $\bar{K}$ оптимального коэффициента K .

(d) Пользуясь своей программой или каким-либо пакетом, постройте семейство графиков $\bar{P}/R$ от K_* для случая $\Phi^2 = 1/2$ и следующего ряда значений λ : 0.1; 0.2; 0.5; 1.0; 2.0; 3.0; 4.0; 5.0. Убедитесь, что точки минимума графиков получаются при $K_* = \bar{K}$, рассчитав $\bar{K}$ по явному выражению.

(e) Исследуйте установившуюся погрешность оптимальной фильтрации $\bar{P}$ в предположении $Q = 0$ отдельно для двух случаев: $0 \leq \Phi^2 < 1$ и $\Phi^2 > 1$. Докажите, что в первом случае (устойчивая система) при достаточно большом времени фильтрации состояние системы можно определить точно, но при $\Phi^2 > 1$ (неустойчивая система) оно может быть определено только с ошибкой, имеющей минимально возможную дисперсию $\bar{P} = (\Phi^2 - 1)R/\Phi^2$.

(f) Составьте программу и постройте на ЭВМ график значений погрешностей предсказания и фильтрации начального значения и по ходу измерений, для четырех измерений включительно. Прodelайте построение для шести вариантов значений (см. таблицу 3).

Выведите для каждого варианта таблицу значений погрешностей и коэффициента K оптимальной фильтрации для четырех-пяти измерений.

1	$\Phi = 0.78$	$Q = 0.39$	$R = 0.5$	$P_0 = 1.0$
2	$\Phi = 0.78$	$Q = 0.78$	$R = 0.5$	$P_0 = 1.0$
3	$\Phi = 0.78$	$Q = 0.39$	$R = 1.0$	$P_0 = 1.0$
4	$\Phi = 0.78$	$Q = 0.78$	$R = 1.0$	$P_0 = 1.0$
5	$\Phi = 0.78$	$Q = 0.39$	$R = 5.0$	$P_0 = 1.0$
6	$\Phi = 1.0$	$Q = 25.0$	$R = 32.0$	$P_0 = 1.0$

Таблица 3: Варианты значений параметров для задания 7.

(g) Вычислительным экспериментом подтвердите аналитические (расчетные) результаты пункта (f). На график выведите значения обновляющего процесса и ошибок предсказания и фильтрации.

Задание 8. Дана система (рис. 1) с входным сигналом $y(t)$, который проходит через блок с передаточной функцией $1/(s + a)$, где процесс $y(t)$ может быть представлен как стационарный, экспоненциально-коррелированный гауссовский шум с нулевым средним и временем корреляции T :

$$E\{y(t)y(t + \tau)\} = 5e^{-|\tau|/T}.$$

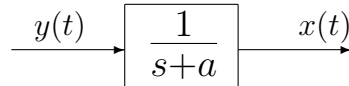


Рис. 1: Система к заданию 8.

Дискретные во времени измерения доступны в виде

$$z(t_i) = x(t_i) + v(t_i),$$

где $v(t_i)$ есть гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией

$$E\{v(t_i)^2\} = 2.$$

Система начинает работу из состояния покоя.

(а) Постройте “истинную” модель в пространстве состояний для этой системы, явно выражая все матрицы модели.

(б) Для построения эффективного фильтра Калмана можно рассмотреть упрощенную модель путем замены коррелированного во времени шума $y(t)$ белым шумом с соответствующей интенсивностью Q в модели, на основе которой строится фильтр. Какова по величине подходящая интенсивность белого шума? Какие соотношения между периодом выборки Δt , временем корреляции T и системным параметром a обеспечат уверенность в том, что упрощенная модель адекватна?

(с) Предыдущий пункт задания выполните отдельно в двух вариантах понятия адекватность (достаточное соответствие) модели.

Вариант 1. Интенсивность белого шума в модели пониженного порядка выбирается так, чтобы в точности соответствовать величине спектральной плотности мощности исходного шума на низкой частоте. Покажите, что в этом случае $Q = 10T$.

Вариант 2. Выбор Q должен быть таким, чтобы значения дисперсии процесса $x(t)$ в установившемся режиме для упрощенной модели и для исходной модели были одинаковы. Покажите, что это приводит к

$$Q = \frac{10T}{1 + aT}.$$

(d) Выпишите в явном виде уравнения фильтра Калмана, когда они базируются: (1) на упрощенной модели, вариант 1; (2) на упрощенной модели, вариант 2; (3) на истинной модели. Обоснуйте выбор элементов всех матриц.

(е) Выпишите в явном виде уравнения, по которым можно выполнить ковариационный анализ качества (анализ чувствительности) результирующего упрощенного фильтра (по вариантам 1 и 2 упрощенной модели) в условиях, когда данные на вход фильтра поступают от “истинной” модели.

(f) Выполните на ЭВМ математическое моделирование для анализа

чувствительности упрощенного фильтра (по вариантам 1 и 2 упрощенной модели), когда он функционирует в реальной (“истинной”) обстановке. Существенно ли различие между вариантами 1 и 2 упрощенного фильтра? Существенно ли различие между упрощенным и неупрощенным (“точным”) фильтрами?

(г) Предыдущий пункт задания выполните отдельно двумя способами.

Способ 1. Решение уравнений по пункту (е), по программе, сделанной самостоятельно.

Способ 2. Моделирование данной системы и всего процесса фильтрации с помощью моделирующего пакета программ. При этом способе сравните результаты и вычислительные затраты, даваемые различными численными алгоритмами фильтра. Дайте практические рекомендации по задаче.

Задание 9. Дана электрическая схема (см. рис. 2), которая конструктивно заключена в так называемый “черный ящик”. Конденсатор C_1 имеет низкое пробивное напряжение и поэтому желательно следить за напряжением U_1 на C_1 , чтобы определить, когда оно достигает предельно допустимого уровня. Единственно доступным для этой цели является напряжение U_0 на выходе этого блока. Благодаря исключительно точному вольтмеру можно измерять U_0 практически точно в дискретном времени. Чтобы оценить U_1 , предположите, что входное напряжение $u(t)$ может быть описано как белый шум:

$$E\{u(t)\} = 0; \quad E\{u(t_1)u(t_2)\} = Q\delta(t_2 - t_1); \quad Q = 2b^2.$$

(а) Запишите выражение для оптимальной оценки напряжения U_1 , предполагая, что система стартует с разряженными конденсаторами. Пользуясь моделирующей программой, постройте график дисперсии

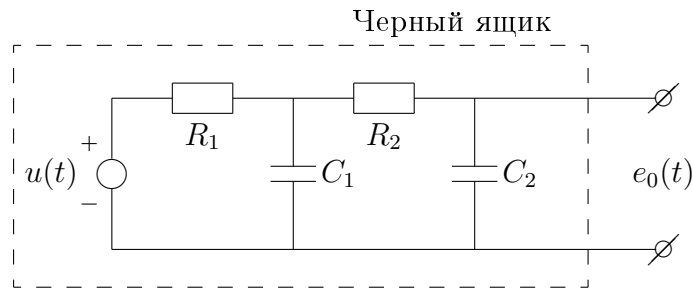


Рис. 2: Электрическая цепь для задания 9. $R_1 = R_2 = 1\Omega$; $C_1 = C_2 = 1F$.

ошибки оценки от времени, беря измерения каждые полсекунды в течение двух секунд.

(b) Повторите решение, предполагая, что измерения содержат точное значение 0 плюс белый дискретный гауссов шум $v(t_i)$ с нулевым средним значением и с $\{v(t_i)v(t_j)\} = R\delta_{ij}$; $R = 0.2b^2$.

Задание 10. Пусть скалярный процесс $y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0,$$

где случайные величины $y(0)$ и $\dot{y}(0)$ имеют совместное гауссовское распределение с характеристиками

$$E\{y(0)\} = 0, \quad E\{\dot{y}(0)\} = 0,$$

$$E\{y(0)^2\} = 4, \quad E\{\dot{y}(0)^2\} = 2, \quad E\{y(0)\dot{y}(0)\} = 1.$$

Дискретные измерения $z(t_i)$ доступны в виде

$$z(t_i) = y(t_i) + v(t_i),$$

где $v(t_i)$ есть белая гауссова последовательность, независимая от $y(0)$ и $\dot{y}(0)$, с

$$E\{v(t_i)\} = 0, \quad E\{v(t_i)^2\} = 1.$$

(a) Определите уравнения оптимальной оценки для $\dot{y}(t_i)$. В чем заключаются соответствующие вычисления?

(b) Используйте разностные уравнения для ковариационной матрицы ошибок (или для инверсии от этой матрицы), чтобы показать, что 2π — неудачный выбор для периода дискретизации времени. Подтвердите это анализом свойства полной наблюдаемости. Какая из компонент вектора состояния системы становится ненаблюдаемой? Дайте физическое объяснение тому, что соответствующий эффект от такого выбора периода дискретизации часто называют стереоскопическим. Каковы более общие формулировки к ответу на вопрос, не вырождается ли система в результате перехода к дискретной во времени модели?

(c) Проведите моделирование на ЭВМ, подтверждающее выводы по пунктам (a) и (b).

Задание 11. Рассмотрим скалярное уравнение

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + w_d(t_i),$$

где $(\cdot)$ — состояние и $w_d(\cdot)$ — дискретный гауссов шум с характеристиками

$$E\{w_d(t_i)\} = 0, \quad E\{w_d^2(t_i)\} = \frac{1}{2}, \quad E\{w_d(t_i)w_d(t_j)\} = 0 \quad (i \neq j).$$

Начальное состояние моделируется как гауссовская случайная величина со статистиками

$$E\{x(t_1)\} = 1, \quad E\{x^2(t_1)\} = 2.$$

Скалярные измерения производятся в моменты t_1 и t_2 в виде

$$z(t_i) = x(t_i) + v(t_i) \quad (i = 1, 2),$$

где $v(\cdot)$ — гауссовская последовательность с характеристиками

$$E\{v(t_i)\} = 0, \quad E\{v^2(t_i)\} = \frac{1}{4}, \quad E\{v(t_i)v(t_j)\} = 0 \quad (i \neq j).$$

(a) Полагая, что $z(t_1) = z_1$ и $z(t_2) = z_2$, получите явные выражения для оценок $\hat{x}(t_i^-)$ и $\hat{x}(t_i^+)$ через измерения; определите дисперсии оценок

$P(t_i^-)$ и $P(t_i^+)$ и оптимальное усиление $K(t_i)$ для моментов t_1 и t_2 . Какова величина “информации”, добавляемой к $P^{-1}(t_i^-)$ благодаря измерениям в моменты t_1 и t_2 ?

(b) Обобщите полученные результаты на случай произвольного числа измерений, а также на случай, когда $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$ — векторы одинаковой размерности.

(c) Спланируйте и проведите вычислительный эксперимент на ЭВМ, иллюстрирующий полученные аналитические результаты.

Задание 12. Система описывается уравнением

$$x(t_i) = 0.7x(t_{i-1}) + w_d(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

начиная от некоторого известного состояния $x(t_0 = 0) = x_0$, где $w_d(\cdot)$ — белая гауссова последовательность, характеризуемая статистиками:

$$E\{w_d(t_i)\} = b = 0.2, \quad E\{[w_d(t_i) - b]^2\} = 0.01.$$

Пусть в каждый момент времени t_i доступны два измерения:

$$z_1(t_i) = 2x(t_i) + v_1(t_i), \quad z_2(t_i) = \sin t_i x(t_i) + v_2(t_i),$$

где $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ — белые гауссовы последовательности, независимые и с характеристиками:

$$E\{v_1(t_i)\} = 0, \quad E\{v_1^2(t_i)\} = 1,$$

$$E\{v_2(t_i)\} = 0, \quad E\{v_2^2(t_i)\} = \cos^2 t_i.$$

(a) Предположим, вы имеете оценку состояния для момента t_{i-1} , основанную на временной истории измерений вплоть до момента t_{i-1} , и эта оценка $\hat{x}(t_{i-1}^+)$ характеризуется ковариацией ошибки $P(t_{i-1}^+)$. Напишите уравнения распространения во времени оптимальной оценки и ее ковариации к моменту следующего измерения, т.е. $\hat{x}(t_i^-)$ и $P(t_i^-)$. Дайте этим уравнениям полное логическое объяснение. Если $\hat{x}(t_{i-1}^+) = 4$ и $P(t_{i-1}^+) = 1$, какими будут $\hat{x}(t_i^-)$ и $P(t_i^-)$?

(b) Есть ли избыточность во фразе “независимые белые” гауссовы последовательности в постановке задачи?

(c) Предположим, измерения в момент t_i дают значения

$$z_1(t_i) = z_{1i} = 3; \quad z_2(t_i) = z_{2i} = 1.$$

Покажите в явном виде, что одни и те же величины для $\hat{x}(t_i^+)$ и для $P(t_i^+)$ получаются последовательным обновлением оценок и ковариации сначала с измерением z_{1i} и затем с z_{2i} и, с другой стороны, одновременным обновлением оценок и ковариации засчет обработки составного вектора

$$z(t_i) = \begin{bmatrix} z_1(t_i) \\ z_2(t_i) \end{bmatrix}.$$

Подумайте, прежде чем делать громоздкие вычисления, — это может сэкономить время и алгебраические преобразования в доказательстве результата для случая обработки составного вектора измерений.

(d) В разд. (c) появилась матрица $R(t_i)$ для вектора измерений. Какое свойство этой матрицы является определяющим (достаточным) для эквивалентности двух способов обработки, указанных в разд. (c), последовательного (скалярного) или одновременного (векторного)? Можете ли вы утверждать, что это свойство необходимо для эквивалентности оценок, получаемых этими двумя способами?

(e) Спланируйте и проведите вычислительный эксперимент, чтобы продемонстрировать результаты предыдущего анализа.

Задание 13. Качество функционирования автопилота в режиме стабилизации высоты характеризуется передаточной функцией

$$\frac{h(s)}{h_c(s)} = \frac{0.3(s + 0.01)}{s^2 + 0.006s + 0.003},$$

где h представляет собой высоту и h_c — заданную высоту. Задатчик высоты h_c моделируется как константа h_{c0} плюс белый гауссов шум $\delta h_c(t)$

в канале задатчика:

$$h_c(t) = h_{c0} + \delta h_c(t).$$

Константа h_{c0} моделируется как нормальная случайная величина со статистиками:

$$\text{Среднее значение} = 3000, \text{ Дисперсия} = 22500^2.$$

Шум в канале задатчика имеет следующие статистики:

$$E\{\delta h_c(t)\} = 0; E\{\delta h_c(t)\delta h_c(t + \tau)\} = N_c \delta(\tau); N_c = 36^2,$$

и $\delta h_c(t)$ независимо от всех других процессов. Доступны непрерывные измерения высоты, и нужно обрабатывать их для получения оценки высоты с минимальной дисперсией. Измерения высоты содержат белый шум, так что измеренная высота есть

$$h_m(t) = h(t) + \delta_m(t),$$

где $\delta_m(t)$ — независимый белый шум с характеристиками:

$$E\{\delta_m(t)\} = 0; E\{\delta_m(t)\delta_m(t + \tau)\} = N_m \delta(t); N_m = 81^2.$$

(а) Определите дифференциальные уравнения, описывающие оптимальную (с минимумом дисперсии ошибки) оценку высоты $h(t)$. Выпишите эти уравнения в скалярной форме. Объясните, как бы вы определили коэффициенты этих уравнений.

(б) Повторите предыдущий пункт, но используйте дискретные во времени измерения, поступающие раз в секунду с ошибкой в виде гауссова белого шума с нулевым средним и интенсивностью 81^2 .

(с) Для разд. (а) и (б) проведите сравнительный вычислительный эксперимент. Для моделирования по разд. (а) используйте пакет типа ДИСПАС или составьте свою программу численного моделирования, включающую интегрирование уравнения Риккати для расчета оптимальной оценки. Для моделирования по разд. (б) используйте предлагаемый программный комплекс. Дайте объяснения результатам.

Задание 14. Радиометрические корреляционные системы навигации по местности производят “измерение положения” путем сканирования подстилающей поверхности непосредственно под движущимся аппаратом и сравнения полученной радиометрической “картинки” с заранее занесенной в память картой местности. Для простоты предположим, что одномерное уравнение временной эволюции положения имеет вид

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + u\Delta t + w_d(t_i),$$

где u — номинальная скорость движения аппарата, $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \text{const}$; $w_d(\cdot)$ — последовательность белого гауссова шума с нулевым средним значением и дисперсией $E\{w_d^2(t_i)\} = Q_d = \text{const}$; $x(t_0)$ — гауссова случайная величина со средним значением $\hat{x}_0$ и дисперсией P_0 . Предположим, “измерение положения” в момент t_i достаточно хорошо представляется моделью

$$z(t_i) = x(t_i) + v(t_i),$$

где $v(\cdot)$ — последовательность белого гауссова шума с нулевым средним значением и дисперсией $E\{v^2(t_i)\} = R = \text{const}$. Предположим, что $x(t_0)$, $w_d(\cdot)$ и $v(\cdot)$ независимы друг от друга.

Пусть $\Delta t = 1$, и цель состоит в том, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку (СКО) в оценке положения в конце 10-ти минутного полета. Измерения могут приниматься в моменты $t_i = 0, 1, \dots, 9$ (не при $t_i = 10$), но, вследствие больших затрат компьютерной памяти на хранение карт, только два измерения могут быть в действительности взяты для обработки. Требуется дать ответ на следующий вопрос: где во время полета эти два измерения должны быть запланированы?

(а) Положите $P_0 = Q_d = R = (30)^2$ и найдите решение вопроса для получения минимальной СКО терминальной оценки положения.

(б) Будем считать, что если СКО оценки положения, обновленная по измерению, превысит 75, то это означает неприемлемо большую вероятность ухода летательного аппарата за пределы хранимой в памяти

карты, что вообще лишит возможности получать сколь-нибудь обоснованные измерения. Учитывая это дополнительное ограничение, решите задачу заново.

(с) Решите задачу в части (b) для $P_0 = (90)^2$, $Q_d = R = (30)^2$.

(d) Решите задачу в части (b) для $Q_d = (90)^2$, $P_0 = R = (30)^2$.

(e) Решите задачу в части (b) для $R = (90)^2$, $P_0 = Q_d = (30)^2$.

(f) Организуйте и проведите вычислительный эксперимент для демонстрации решений по предыдущим пунктам. Составьте также свою программу, решающую задачу методом полного перебора вариантов выбора двух моментов измерений (сколько вариантов?).

Задание 15. Полезный сигнал $s(t)$ является выходом апериодического (инерционного) звена первого порядка, возбуждаемого белым гауссовым шумом $w_1(t)$. Сигнал искажается экспоненциально-коррелированным шумом $n(t)$, который моделируется в виде выходного сигнала формирующего фильтра первого порядка с порождающим белым гауссовым шумом $w_2(t)$ на входе, как показано на рис. 3.

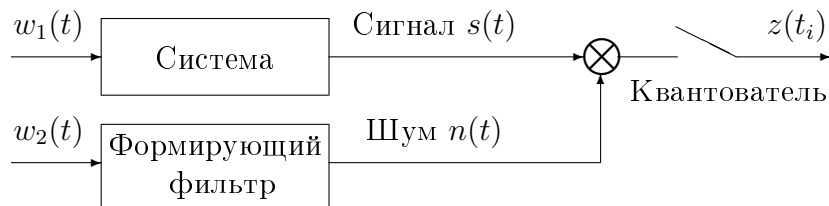


Рис. 3: Схема системы для задания 15

Система (объект) описывается передаточной функцией

$$F_0(s) = \frac{1}{s + w_0},$$

и формирующий фильтр описывается передаточной функцией

$$F_n(s) = \frac{1}{s + w_n}.$$

Известны статистики:

$$E\{w_1(t)\} = 0, \quad E\{w_1(t)w_1(t + \tau)\} = 2\delta(t),$$

$$E\{w_2(t)\} = 0, \quad E\{w_2(t)w_2(t + \tau)\} = 1\delta(t).$$

Белые шумы $w_1(t)$ и $w_2(t)$ взаимно независимы, и заданы характеристики независимых от них начальных значений сигнала и шума:

$$E\{s(t_0)\} = 0, \quad E\{n(t_0)\} = 0, \quad E\{s^2(t_0)\} = 1, \quad E\{n^2(t_0)\} = \frac{1}{2}.$$

(а) Определите рекуррентное уравнение для дисперсии ошибки оценивания сигнала, используя дискретные измерения $z(t_i)$.

(б) Выполнив преобразование базиса, рекуррентно выразите один из элементов преобразованной матрицы ковариаций $P^*(t_i^+)$ исключительно через значение этого же элемента в момент t_{i-1} . Запишите полные уравнения полученного при этом редуцированного фильтра.

(с) Проведите анализ и затем вычислительный эксперимент, позволяющие определить по отдельности, как влияют на качество работы фильтра следующие факторы: изменение интенсивности шума $w_1(t)$ с 2 до 1 (или до 3); изменение дисперсии начального состояния шума $n(t)$ с 1/2 до 1 (или до 2); совпадение частот $w_0 = w_n$.

Задание 16. Рассмотрим систему первого порядка, моделируемую уравнением

$$\dot{x}(t) = w(t),$$

где $w(t)$ — белый гауссов шум со статистиками

$$E\{w(t)\} = 0, \quad E\{w(t)w(t + \tau)\} = 4\delta(\tau).$$

Пусть в момент $t = 0$ начальное состояние $x(0)$ моделируется как гауссова случайная величина с характеристиками

$$E\{x(0)\} = 10, \quad E\{[x(0) - 10]^2\} = 25.$$

Наблюдаемый сигнал

$$z(t) = x(t) + v(t)$$

содержит белый гауссов шум $v(t)$, независимый от $w(t)$, с характеристиками

$$E\{v(t)\} = 0, \quad E\{v(t)v(t + \tau)\} = 16\delta(\tau).$$

(а) Сначала определите уравнения фильтра Калмана для непрерывного времени t . Затем исследуйте установившееся поведение фильтра при $t \rightarrow \infty$. Покажите, что оно инвариантно по времени и определите передаточную функцию фильтра.

(б) Постройте дискретную по времени модель системы и затем запишите уравнения дискретного фильтра. Сделайте в них предельный переход к установившемуся режиму и найдите передаточную функцию фильтра (в терминах z -преобразования).

(с) Проведите вычислительные эксперименты, отвечающие разд. (а) и (б) задания, чтобы, в частности, оценить время достижения установившегося режима в обоих случаях. Для моделирования по разд. (а) можете использовать ДИСПАС.

Задание 17. Данная модель линейной системы показана на схеме (рис. 4), где $w_1(t)$, $w_2(t)$, $v(t)$, $x_1(0)$ и $x_2(0)$ суть взаимно независимые с нулевыми средними значениями гауссовские процессы и величины с характеристиками

$$E\{w_1(t)w_1(t + \tau)\} = \delta(\tau), \quad E\{w_2(t)w_2(t + \tau)\} = \delta(\tau),$$

$$E\{v(t)v(t + \tau)\} = 2\delta(\tau), \quad E\{x_1^2(0)\} = 1, \quad E\{x_2^2(0)\} = 2.$$

(а) Определите алгоритм оптимального оценивания для $x_3(t)$, используя непрерывные измерения $z(t)$. (Первый вопрос: сколько переменных состояния требуется для описания системы?) Найдите алгоритм при $t \rightarrow \infty$.

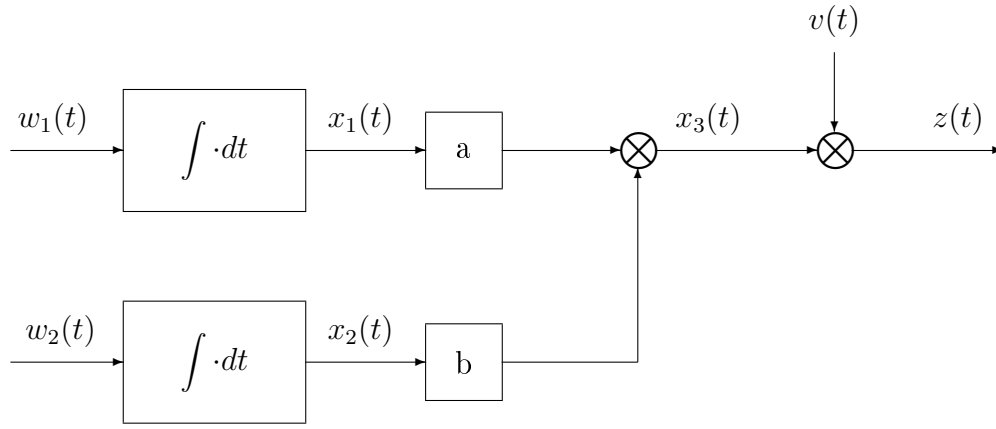


Рис. 4: Модель системы для задания 17.

(b) Перейдите к дискретной модели измерений и постройте дискретный фильтр. Проведите вычислительный эксперимент. Достигается ли в алгоритме фильтрации установившийся режим?

Задание 18. Модель движения спутника в плоской орбите может быть получена рассмотрением движения точечной массы в поле центральной силы. Пусть r — расстояние от центра силы (центра Земли) до спутника и Θ — угол между опорной координатной осью, проходящей через этот центр, и линией от центра силы до центра массы спутника. Предположим, что спутник может смещаться с номинальной орбиты радиально под действием управления u_r и тангенциально под действием управления u_τ . Такая модель имеет вид нелинейных уравнений:

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\Theta}^2(t) - \frac{G}{r^2(t)} + u_r(t),$$

$$\ddot{\Theta}(t) = -\frac{2}{r(t)}\dot{\Theta}(t)\dot{r}(t) + \frac{1}{r(t)}u_\tau(t).$$

(a) Выведите линейные уравнения возмущенного движения спутника относительно некоторой номинальной траектории, беря вектор состояния в виде $x = (r, \dot{r}, \Theta, \dot{\Theta})$.

(b) Одним из решений исходных нелинейных уравнений (номи-

нальной траекторией) является круговая орбита: $r(t) = r_0$, $\dot{r}(t) = 0$, $\Theta(t) = wt$, $\dot{\Theta}(t) = w$, $u_r(t) = u_\tau(t) = 0$, $G = r_0^3 w^2$ для любых t . Конкретизируйте уравнения по разд. (а) для этой инвариантной во времени модели. Заметьте, что в ней отсутствует случайное возмущение состояния.

(с) Предположим, что для создания простой и недорогой телеметрической системы предлагают производить измерения только угла $\Theta = x_3$. С учетом случайных погрешностей измерение представляют как

$$z_1(t) = x_3(t) + v_1(t),$$

где

$$E\{v_1(t)\} = 0, \quad E\{v_1(t)v_1(t + \tau)\} = R_1\delta(\tau).$$

Другое предложение — измерять только расстояние $x_1 = r$. В этом случае

$$z_2(t) = x_1(t) + v_2(t),$$

где

$$E\{v_2(t)\} = 0, \quad E\{v_2(t)v_2(t + \tau)\} = R_2\delta(\tau).$$

Ваша задача — определить, которое из этих предложений лучше. Наблюдаемы ли обе модели системы? О чем это свидетельствует? Можно ли получить какую-либо пользу от включения в вектор измерений одновременно z_1 и z_2 ?

(d) Решив задачу в части (с), спланируйте и проведите вычислительный эксперимент для дискретной фильтрации, подобрав правдоподобные, по вашему мнению, параметры номинальной траектории, ошибок измерений и темпа измерений. В качестве особого вопроса, выясните, как каждый из трех вариантов генерации измерений для фильтра проявляет себя в показателях качества оценивания вектора состояния.

Задание 19. Линейная система имеет передаточную функцию вы-

ход/вход вида

$$\frac{x(s)}{w(s)} = \frac{s + \alpha}{s + \beta}$$

Известно, что вход $w(t)$ тождественно равен нулю. Начальное состояние системы моделируется как гауссовская случайная величина с

$$E\{x(0)\} = 0, \quad E\{x^2(0)\} = 1.$$

Непрерывные измерения вида

$$z(t) = x(t) + v(t)$$

поступают с погрешностью $v(t)$ вида гауссовского белого шума с

$$E\{v(t)\} = 0, \quad E\{v(t)v(t + \tau)\} = \delta(\tau).$$

(а) Определите в явном виде уравнения оптимальной фильтрации, включая дисперсию ошибки, для всех $t \geq 0$. Для получения уравнения дисперсии ошибки как функции t следующий факт может оказаться полезным. Если положительно определенная матрица M удовлетворяет уравнению

$$\dot{M} = AM + MA^T - MBM,$$

то M^{-1} удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{M}^{-1} = -A^T M^{-1} - M^{-1}A + B.$$

(Проверьте этот факт, используя формулу дифференцирования по t обратной матрицы $M^{-1}(t)$).

(b) Выведите уравнения оптимальной фильтрации, используя дискретные измерения, эквивалентные указанным непрерывным.

(с) Проведите по уравнениям разд. (b) вычислительный эксперимент. Соплассуетс ли он с аналитическим решением по разд. (а)?

Задание 20. Рассмотрите неустойчивую систему первого порядка

$$\dot{x}(t) = x(t) + w(t)$$

с измерениями

$$z(t) = x(t) + v(t),$$

где

$$E\{w(t)\} = 0, \quad E\{w(t)w(t + \tau)\} = Q\delta(\tau),$$

$$E\{v(t)\} = 0, \quad E\{v(t)v(t + \tau)\} = R\delta(\tau).$$

Положите $Q = 1$.

(а) Решите уравнение оптимальной фильтрации относительно дисперсии ошибки $P(t)$ как функции времени, предполагая $P(t = 0) = P_0$. По найденному выражению для $P(t)$ определите $\lim P(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Для значений $R = 1, 2$ и 4 изобразите кривые $P(t)$ как функции времени (при $P_0 = 1$).

(б) Рассмотрите однородную часть уравнения фильтра, которая описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = [1 - P/R]y.$$

Используя функцию Ляпунова $V(\cdot, \cdot)$, определенную выражением

$$V(y, t) = y^T P^{-1}(t)y,$$

покажите, что система фильтрации асимптотически устойчива. Какое это имеет значение?

(с) Пользуясь дискретными измерениями $z(t_i)$, эквивалентными данным непрерывным, постройте соответствующий дискретный фильтр.

(д) Проведите вычислительный эксперимент, в котором получите графики дисперсий ошибок экстраполяции и фильтрации для числовых данных из разд. (а). Сравните эти графики с кривыми $P(t)$ из разд. (а).

Задание 21. Непрерывный процесс измерений характеризуется уравнением

$$z(t) = at + n(t),$$

где a моделируется как гауссова случайная величина с

$$E\{a\} = 0, \quad E\{a^2\} = 1$$

и $n(t)$ белый гауссов шум с

$$E\{n(t)\} = 0, \quad E\{n(t)n(t + \tau)\} = 2\delta(\tau).$$

(а) Определите уравнения оптимальной фильтрации для оценивания параметра a . Является ли фильтр устойчивой системой?

(б) Постройте дискретный фильтр, использующий дискретные во времени измерения $z(t_i)$, эквивалентные заданным непрерывным.

(с) Проведите вычислительный эксперимент по разд. (б). Достигает ли фильтр установившегося режима?

Задание 22. Рассмотрим систему, в которой объект описан передаточной функцией $F_0(s) = 1/s$ и возбуждается белым шумным гауссовым процессом $w_1(t)$. Выход объекта искажается экспоненциально-коррелированным шумом $x_2(t)$, который представлен как выход формирующего фильтра $F_n(s) = 1/(s + a)$ с белым гауссовым шумом $w_2(t)$ на входе (рис. 5).

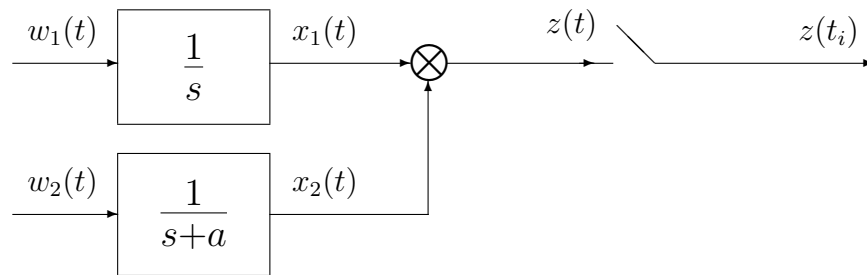


Рис. 5: Конфигурация системы к заданию 22.

Известны характеристики взаимно некоррелированных шумов w_1 и w_2 , —

$$E\{w_1(t)\} = 0, \quad E\{w_1(t)w_1(t + \tau)\} = Q_1\delta(\tau),$$

$$E\{w_2(t)\} = 0, \quad E\{w_2(t)w_2(t + \tau)\} = Q_2\delta(\tau),$$

а также характеристики начальных значений, —

$$E\{x_1(t_0)\} = 0, \quad E\{x_2(t_0)\} = 0,$$

$$E\{x_1^2(t_0)\} = \sigma_1^2, \quad E\{x_2^2(t_0)\} = \sigma_2^2, \quad E\{x_1(t_0)x_2(t_0)\} = 0,$$

$$E\{z^2(t_0)\} = \sigma_z^2, \quad E\{z(t_0)x_1(t_0)\} = \sigma_1^2.$$

(а) Определите оптимальную непрерывную во времени оценку для переменной состояния x_1 . Проследите ее поведение при $t \rightarrow \infty$. Покажите, что в этом режиме фильтр представляет собой инвариантную во времени систему с передаточной функцией

$$\frac{\hat{x}_1(s)}{z(s)} = \frac{c_1(s + a)}{s + ac_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}}.$$

(б) Постройте дискретную модель сигнала x_1 и шума x_2 . Используя дискретные измерения $z_1(t_i)$, найдите уравнения оптимальной дискретной фильтрации и определите характеристики установившегося режима.

(с) Выполните подходящее преобразование базиса в пространстве состояний, чтобы получить редуцированные уравнения фильтра. Найдите эти уравнения.

(д) Задайте ряд численных значений параметров системы и проведите вычислительный эксперимент, в котором характеризуйте границы изменения ковариаций ошибок оценивания и скорость достижения установившегося режима оптимальной фильтрации.

Задание 23. Допустим, инженер дает вам блок как некоторый черный ящик с одним входом и одним выходом, утверждая при этом, что в блоке находится установившийся фильтр Калмана. Чтобы протестировать качество фильтра, вы подаете на его вход коррелированный шум с автокорреляционной функцией

$$\Psi_{nn}(\tau) = E\{n(t)n(t + \tau)\} = Ne^{-5|\tau|}$$

и получаете выходной сигнал, спектральная плотность мощности которого равна

$$\Psi_{yy}(w) = \frac{5}{2} \cdot \frac{N(w^2 + 16)}{(w^2 + 4)(w^2 + 25)}$$

(a) Что вы думаете о компетентности этого инженера?

(b) Слегка озадаченные, вы спрашиваете у инженера, как он проектировал фильтр. Он говорит, что строил фильтр, чтобы разделить сигнал из аддитивной смеси сигнала и шума, спектральные плотности мощности которых равны

$$\bar{\Psi}_{ss}(w) = \frac{5/12}{w^2 + 4}, \quad \bar{\Psi}_{nn}(w) = \frac{7/12}{w^2 + 16}$$

и сигнал и шум некоррелированы друг с другом. Найдите уравнения оптимального непрерывного фильтра и сравните результат его тестирования с результатом тестирования данного блока. Какую критику вы можете высказать инженеру-разработчику блока?

(c) Перейдите к эквивалентному дискретному во времени варианту этого задания. Опишите дискретную модель и дискретный фильтр. Выполните подходящее преобразование базиса и редуцируйте фильтр. Определите характеристики установившегося режима.

(d) Проведите вычислительный эксперимент для фильтра по разд. (c). Согласуется ли характер изменения ковариаций во времени с результатом вашего расчета по разд. (b)?

4 Методические указания

4.1 Запись системы дифференциальных уравнений, моделирующих поведение (состояние) системы

Пример: $v_x(t) = c_x + \beta_x(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_x(t) \\ \dot{v}_x(t) = \dot{\beta}_x(t) = \omega(t) \end{cases} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v_x(t) \end{bmatrix} - \text{вектор состояния}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t)$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ v_x(t_0) = c_x \end{bmatrix} - \text{начальное состояние}$$

Характеристики начального состояния:

1. $E\{x(t_0)\} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{c}_x \end{bmatrix} = \bar{x}_0.$
2. $E\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^T\} = P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & p_{12}^0 \\ p_{21}^0 & p_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (p_{21}^0 = p_{12}^0).$

Характеристики белого шума $\omega(t)$:

1. $E\{\omega(t)\} = 0.$
2. $E\{\omega(t)\omega(t')^T\} = \sigma_\omega^2 \delta(t - t') = Q\delta(t - t'), \quad Q = \sigma_\omega^2.$

Матричная запись модели состояния:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Fx(t) + G\omega(t) \tag{1}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{x}_0 = E\{x(t_0)\} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{c}_x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_{11}^0 & p_{12}^0 \\ p_{21}^0 & p_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

4.2 Запись модели измерений

$$z(t_i) = Hx(t_i) + v(t_i), \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Характеристики белого шума $v(t)$:

1. $E\{v(t_i)\} = 0$.
2. $E\{v(t_i)v(t_j)^T\} = R_i\delta_{ij}$.

4.3 Построение дискретной модели состояния

1. Вид общего решения уравнения (1):

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)G(\tau)d\beta(\tau) \quad (3)$$

2. Определяем $\Phi(t)$:

$\Phi(t) = e^{Ft}$ - переходная матрица состояния

Ее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = F(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I. \quad (4)$$

В наших заданиях: $F(t) = F = const$

$G(t) = G = const$

Решаем (4) через преобразование Лапласа:

$$s\Phi(s) - \Phi(0) = F\Phi(s)$$

$$(Is - F)\Phi(s) = \Phi(0) = I$$

$$\Phi(s) = (Is - F)^{-1} - \text{это расчетная формула.}$$

Пример:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}.$$

Находим к $\Phi(s)$ обратное преобразование Лапласа:

$$\Phi(s) \div \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

при этом пользуемся таблицами преобразования Лапласа, где находим:

$$\frac{1}{s} \div 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{s^2} \div t$$

Таким образом, найдено $\Phi(t)$.

3. Общее решение (3) рассматриваем в дискретном времени: $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$ так, что $x(t_k)$ считаем начальным значением для интервала от t_k до t_{k+1} :

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1} - t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1} - \tau)Gd\beta(\tau). \quad (6)$$

Обозначаем интеграл как

$$\omega_d(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1} - \tau)Gd\beta(\tau).$$

Это случайное слагаемое, $\omega_d(t_k)$, есть дискретный белый шум с характеристиками:

$$(a) \quad E\{\omega_d(t_k)\} = 0.$$

(b)

$$\begin{aligned} Q_d(t_k) &= E\{\omega_d(t_k)\omega_d(t_j)^T\} = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1} - \tau) G Q G^T \Phi^T(t_{k+1} - \tau) d\tau = Q_d \end{aligned} \quad (7)$$

Перепишем (6) в общем виде:

$$x(t_{k+1}) = \Phi x(t_k) + \omega_d(t_k). \quad (8)$$

Это есть дискретная модель, где матрица $\Phi = \Phi(t_{k+1} - t_k)$ определяется из п. 2 данного раздела, а матрица Q_d для шума $\omega_d(t_k)$ определяется по (7).

Примечание. Для удобства везде в дискретных моделях используем постоянный интервал квантования времени и обозначим его

$\tau = t_{k+1} - t_k = \text{const}$, отличая его (естественно !) от переменной интегрирования τ в (7).

Пример:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q_d &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & (t_{k+1} - \tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t_{k+1} - \tau) & 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= Q \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} (t_{k+1} - \tau)^2 & (t_{k+1} - \tau) \\ (t_{k+1} - \tau) & 1 \end{bmatrix} d\tau = Q \int_0^\tau \begin{bmatrix} \theta^2 & \theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} d\theta = \\ &= Q \begin{bmatrix} \theta^3/3 & \theta^2/2 \\ \theta^2/2 & \theta \end{bmatrix} \Big|_0^\tau = Q \begin{bmatrix} \tau^3/3 & \tau^2/2 \\ \tau^2/2 & \tau \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, найдена дискретная модель состояния с конкретными выражениями для определяющих ее матриц (9) и (10).

Примечание. Иногда требуется модель (8) записать в более общем виде:

$$x(t_{k+1}) = \Phi x(t_k) + G_d \bar{\omega}_d(t_k), \quad (11)$$

где G_d имеет заданную структуру, например, форму нижнетреугольной матрицы с единицами по диагонали. Для этого выполняем разложение найденной матрицы Q_d вида:

$$Q_d = G_d \bar{Q}_d G_d^T, \quad (12)$$

где $\bar{Q}_d$ – диагональная матрица,

$$\bar{Q}_d = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Пример:

$$Q_d = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_{21} & 1 \end{bmatrix}}^{G_d} \overbrace{\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}}^{\bar{Q}_d} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & g_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{G_d^T}; \quad Q = \sigma_\omega^2$$

$$\begin{pmatrix} q_{11} = \sigma_\omega^2 \tau^3 / 3 \\ q_{12} = \sigma_\omega^2 \tau^2 / 2 \\ q_{22} = \sigma_\omega^2 \tau \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} q_{11} = d_1, & q_{12} = d_1 g_{21} \\ q_{22} = d_2 + d_1 g_{21}^2 \end{bmatrix}$$

Отсюда решение:

$$d_1 = q_{11} = (\tau^3 / 3) \sigma_\omega^2$$

$$g_{21} = q_{12} / d_1 = (3 / (2\tau))$$

$$d_2 = q_{22} - d_1 g_{21}^2 = \sigma_\omega^2 \tau - \sigma_\omega^2 \frac{\tau^3}{3} \cdot \frac{9}{4 \tau^2} = \sigma_\omega^2 \tau [1 - \frac{3}{4}] = \sigma_\omega^2 \frac{\tau}{4}. \quad (14)$$

$$G_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2\tau} & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_d = \begin{bmatrix} (\tau^3 / 3) \sigma_\omega^2 & 0 \\ 0 & (\tau / 4) \sigma_\omega^2 \end{bmatrix}.$$

Дискретная модель (11) построена, то есть ее матрицы выписаны в явном виде, в примере: (9) и (14).

Примечание. В модели (11) дискретный белый шум $\bar{\omega}(t_k)$ состоит из двух независимых компонент:

$$\bar{\omega}(t_k) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}^{(1)}(t_k) \\ \bar{\omega}^{(2)}(t_k) \end{bmatrix}.$$

Компоненты имеют дисперсии, соответственно, $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, взятые из (13). В данном примере эти дисперсии указаны в (14).

Примечание. Иногда требуется модель вида (11), в которой $\bar{\omega}_d(t_k)$ состоит из независимых компонент с единичными дисперсиями. Для ее построения вместо (12) ищем разложение

$$Q_d = \bar{G}_d \bar{G}_d^T.$$

Можно найти его, как показано между (13) и (14). Но можно получить из (14), или в общем случае из (13):

$$\bar{Q}_d = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}}^{\tilde{Q}_d} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}}^{\tilde{Q}_d^T} = \tilde{Q}_d \tilde{Q}_d^T$$

$$Q_d = G_d \bar{Q}_d G_d^T = G_d \tilde{Q}_d \tilde{Q}_d^T G_d^T = (G_d \tilde{Q}_d)(G_d \tilde{Q}_d)^T = \bar{G}_d \bar{G}_d^T$$

$$\bar{G}_d = G_d \tilde{Q}_d$$

Пример:

$$\bar{G}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2\tau} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\tau^3}{3}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\tau}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\tau^3}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}\tau} & \frac{\sqrt{\tau}}{2} \end{bmatrix}.$$

4.4 Запись уравнений оптимального оценивания с дискретными моделями системы

Модели в общем виде:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= \Phi x(t_k) + G_d w_d(t_k) \\ z(t_k) &= H x(t_k) + v(t_k). \end{aligned}$$

Все элементы моделей найдены, Q_d – ковариация шума $w_d(t_k)$.

Два этапа оптимального оценивания:

Этап I. Оптимальное предсказание, от t_k до t_{k+1} , $k = 0, 1, \dots$

1. Предсказанная оценка: $\hat{x}(t_{k+1}^-) = \Phi \hat{x}(t_k^+)$

Начальное значение: $\hat{x}(t_0^+) = \bar{x}_0$.

2. Предсказанная ковариация ошибки оценки:

$$P(t_{k+1}^-) = \Phi P(t_k^+) \Phi^T + G_d Q_d G_d^T$$

Начальное значение: $P(t_0^+) = P_0$.

Этап II. Оптимальное обновление оценок по измерениям, $k = 0, 1, \dots$

1. Обновленная оценка: $\hat{x}(t_k^+) = \hat{x}(t_k^-) + K(t_k)[z(t_k) - H\hat{x}(t_k^-)]$

2. Обновленная ковариация ошибки оценки:

$$P(t_k^+) = P(t_k^-) - K(t_k) H P(t_k^-)$$

3. Оптимальная матрица усиления:

$$K(t_k) = P(t_k^-) H [H P(t_k^-) H^T + R]^{-1}$$

4.5 Планирование вычислительного эксперимента

Выпишем все числовые величины, подлежащие выбору и вводу в программу, делая обзор всех предыдущих пунктов (на примере).

$$F, \quad G, \quad Q, \quad R, \quad \tau; \quad \sigma_\omega^2.$$

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{c}_x \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & p_{12}^0 \\ p_{12}^0 & p_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с заданием, планируем и проводим эксперимент.

5 Вычислительный эксперимент

Практическая часть каждого задания, т.е. вычислительный эксперимент, проводится на готовых программных продуктах.

Для моделирования процесса оптимальной фильтрации в дискретном времени студентам предлагается программный комплекс “Стохастические модели, оценки и управление”.

Краткие характеристики программы.

- Программа позволяет вводить параметры динамической системы в дискретном времени (матрицы, элементами которых могут быть не только числа, но и арифметические выражения), сохранять и редактировать данные, проводить расчеты по заданным алгоритмам, сохранять и просматривать результаты расчетов.
- В программе реализованы несколько алгоритмов дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме).
- В программе имеются средства для построения графиков моделируемых сигналов (например, координат вектора состояния объекта, оценки вектора состояния, ковариации ошибки фильтрации и т.п.).
- Оболочка программы написана с использованием библиотеки Turbo Vision 2.0 и имеет стандартный для нее интерфейс.
- Программа обладает контекстной помощью, которая позволяет получить подробную информацию как о самой программе (система меню, порядок работы с программой, представление данных и т.п.), так и о всех реализованных алгоритмах фильтрации.

Эта программа дает студентам экспериментальный материал для иллюстрации и обсуждения решений задач данного курса.

6 Рекомендуемая литература

Список литературы

- [1] Острем К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973.
- [2] Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. — М.: Энергия, 1973.
- [3] Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г. Основы стохастической теории автоматических систем. — М.: Наука, 1980.
- [4] Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
- [5] Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. — М.: Наука, 1971.
- [6] Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана. — М.: Мир, 1988.